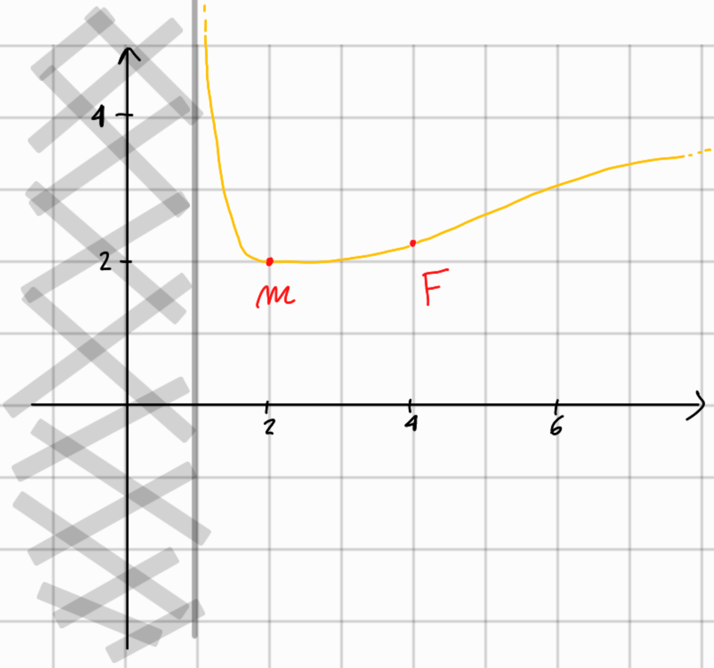
ESERCIZIO 1

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$



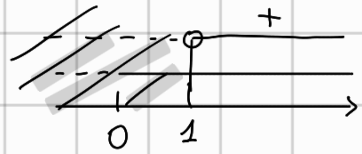
- C.E. $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$

$D = (1, +\infty)$

- $0 \notin D \Rightarrow$ NO INT. ASSE Y

- STUDIO DEL SEGNO e INT. ASSE X

$\frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 0$ $\qquad x \geq 0$, $\sqrt{x-1} > 0$ $\forall x \in D$



$f(x)$ è POSITIVA $\forall x \in D$
$\rightarrow f(x)$ è NEGATIVA MAI
$\rightarrow$ NON CI SONO INTERSEZIONI CON L'ASSE X

- LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \rightarrow$ ASINTOTO VERTICALE DX

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{+\infty}{+\infty}$ F.I.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ PER CONFRONTO DI INFINITI

OPPURE

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} \overset{D.H.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{2} = +\infty$

$D\left((x-1)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$

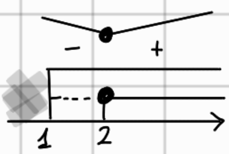
CONTROLLO ASINTOTO OBLIQUO

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x-1}} = 0 \rightarrow$ NO ASINTOTO OBLIQUO

- DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = \frac{1(x-1)^{\frac{1}{2}} - x\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{\left((x-1)^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{x-1} - \frac{x}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}}}{x-1} = \frac{\frac{2(x-1)-x}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}}}{x-1} = \frac{2x-2-x}{2(x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x-2}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$x-2 \geq 0$ $\quad | \quad (x-1)^{\frac{3}{2}} > 0$
$x \geq 2$ $\quad | \quad \forall x \in D$



f è CRESCENTE per $x > 2$
f è DECRESCENTE per $1 < x < 2$
f è STAZIONARIA per $x = 2$

$f(2) = \frac{2}{\sqrt{2-1}} = 2$ $\qquad m = (2, 2)$ P.TO DI MINIMO

■ DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = \frac{1 \cdot 2(x-1)^{3/2} - (x-2)\cancel{2}\frac{3}{\cancel{2}}(x-1)^{\frac{3}{2}-1}}{4[(x-1)^{3/2}]^2} = \frac{2(x-1)^{3/2} - 3(x-2)(x-1)^{1/2}}{4(x-1)^3}$$

$$= \frac{(x-1)^{1/2}[2(x-1)-3(x-2)]}{8(x-1)^3} = \frac{2x-2-3x+6}{8(x-1)^{3-\frac{1}{2}}} = \frac{-x+4}{8(x-1)^{5/2}}$$

$-x+4 \geq 0$

$x \leq 4$

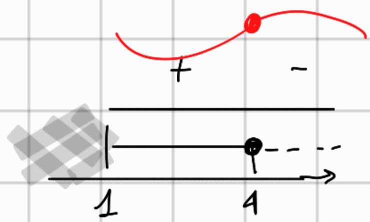
$8(x-1)^{5/2} > 0$

$x-1 > 0$

$x > 1$

$\downarrow$

$\forall x \in D$



- f è CONVESSA $1 < x < 4$
- f è CONCAVA $x > 4$
- f presenta un p.to di FLESSO in $x = 4$

$$f(4) = \frac{4}{\sqrt{4-1}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \simeq 2.31$$

$$F = \left(4, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

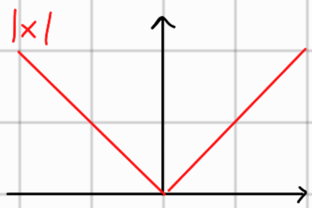
---

b. Data $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ è detto p.to stazionario se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$

TEOREMA

Se f è derivabile in x_0 e x_0 è p.to di massimo o minimo relativo allora x_0 è p.to stazionario.

c. Data $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ si dice PUNTO ANGOLOSO se il limite destro e sinistro del rapporto incrementale sono diversi e almeno uno dei due è finito



$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$$

esempio $f(x) = |x|$ $\quad f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$

$x_0 = 0$

ESERCIZIO 2

$\int f g' = fg - \int f' g$ $\qquad\qquad c \in \mathbb{R}$

a. $$\int \underbrace{(x-1)}_{f} \underbrace{e^{2x}}_{g'} dx = (x-1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c = \frac{e^{2x}}{4}(2x-2-1) + c = \frac{e^{2x}}{4}(2x-3) + c$$

$f' = 1 \qquad g = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

$0 \cdot \infty = F.I.$

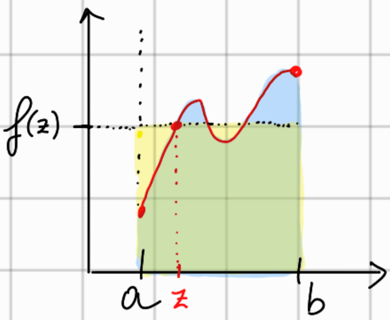
b. $$\int_{-\infty}^{0} (x-1)e^{2x} = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{4}(2x-3)\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{4}(-3) - \frac{\overset{\to 0}{e^{2a}}}{4}\overset{+\infty}{(2a-3)}\right] = -\frac{3}{4} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty}\frac{(2a-3)}{4e^{-2a}}}_{=0} =$$

PER CONFRONTO INFINITI

$$= -\frac{3}{4}$$

c. Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ esiste un punto $z \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(z)$$



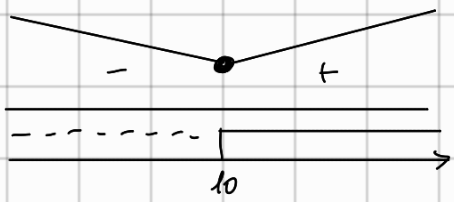
il teorema garantisce che l'area sottesa dall'integrale è equivalente a quella del rettangolo di base $(b-a)$ e altezza $f(z)$.

ESERCIZIO 3

Per trovare il minimo della funzione studio il segno della derivata prima

$$C(d) = \ln(x^2 - 20x + 110)$$

$$C'(d) = \frac{2x-10}{x^2-10x+110} \geq 0$$



- $2x - 20 \geq 0$
  $x \geq 10$

- $x^2 - 20x + 110 > 0$
  $\Delta = 400 - 440 = -40 < 0$
  $\forall x \in \mathbb{R}$

La concentrazione sarà minima a 10 km di distanza dalla fabbrica.

ESERCIZIO 4

a. Si effettua il test T per campioni doppi.

Sia μ_x la media della lunghezza dell'intera popolazione di ricci nutriti con dieta X e sia μ_y la media della lunghezza dell'intera popolazione di ricci nutriti con dieta Y

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \rightarrow \text{(NON C'È DIFFERENZA TRA LE DUE DIETE)} \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_y \rightarrow \text{(UNA DIETA FA ACCRESCERE DI PIÙ DELL'ALTRA)} \end{cases}$$

$n = 6$

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\left(22.2+20.6+23.9+21.4+21.6+22.3\right) = \frac{1}{6}(132) = 22.0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{6}\left(24.4+22.5+23.5+22.9+22.7+23.2\right) = \frac{1}{6}(139.2) = 23.2$$

La media nei due campioni è diversa, per verificare se la differenza è significativa calcoliamo il test per campioni doppi.

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{5}\left[(0.2)^2+(-1.4)^2+(1.9)^2+(-0.6)^2+(-0.4)^2+(0.3)^2\right] = \frac{6.22}{5} = 1.244$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = \frac{1}{5}\left[(1.2)^2+(-0.7)^2+(0.3)^2+(-0.3)^2+(-0.5)^2+(0)^2\right] = \frac{2.36}{5} = 0.472$$

	0.1	0.05	0.01	0.001
10	1.812	2.228	3.169	4.587
	✓	✓	✗	✗

$$|T^*_{2\cdot(6-1)}| = |T^*_{10}| = \frac{|\bar{y}-\bar{x}|}{\sqrt{S_x^2+S_y^2}}\sqrt{n} = \frac{|23.2-22|}{\sqrt{1.244+0.472}}\sqrt{6} = \frac{1.2}{\sqrt{1.716}}\sqrt{6} \simeq 2.244 > 2.228$$

Possiamo affermare con il 95 % di confidenza che la dieta Y ha portato a ricci mediamente più grandi.

b. Si tratta di una variabile QUANTITATIVA CONTINUA.

PER LA MEDIANA RIORDINO I DATI

20.6	21.4	21.6	22.2	22.3	22.5	22.7	22.9	23.2	23.5	23.9	24.4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$$M = \frac{22.5+22.7}{2} = 22.6$$

Ci si aspetta che la varianza dei valori al punto b sia inferiore poiché sono numeri più vicini tra loro rispetto ai valori della tabella.